全品
— SINCE 1992 —

教育图书 功能学具 学生之家

基础教育行业专研品牌

30+年专注教育行业

全品高考 第二轮专题

北京专版



数学

听课手册

主编 肖德好

天津出版传媒集团

天津人民出版社

全品
SINCE 1992
教育图书 功能学具 学生之家
基础教育行业专研品牌

30+年专注教育行业

全品高考 第二轮专题

北京专版

本册主编
夏 雨
副 主 编
宋 艳
编 者
夏 雨 宋 艳 李子忠
特约主审
甘志国

主编 肖德好

数学
听课手册

天津出版传媒集团
天津人民出版社

全品高考第二轮专题 数学 北京专版

高三考生 透析命题 聚焦答卷 » 理想的高考成绩

二轮复习 考试多，时间紧 题量大，做不完？

《全品高考第二轮专题》—— 精 准 透



6大模块统领**二轮复习**

8个综合实现**提能进阶**

2页作业**限时限量**

全解全析，方便使用

一轮复习 有的放矢

跳出题海 精准备考

只做真正的**北京专版**

精选试题，特别关注北京高考试卷结构

知识点命题特点、知识点之间的联系

题干特点、选项特点

设问特点、答题特点

……





知识回顾，强化要点

突出考查重点

必记公式，提警易错点

速查轻松便捷

考前梳理 巩固要点

抓住阅卷人眼睛

1. 数学符号答题。 2. 逻辑清晰，必要的文字说明，条件完整。
3. 字迹清晰整齐，书写规范，注意错别字。

CONTENTS 目录

01 高考专题讲练

- **思想篇** 数学思想方法的应用 …… 001
- **方法篇** 选填题的特殊解法 …… 005
- **自习篇** 集合、复数、常用逻辑用语、不等式的性质与基本不等式、统计 …… 008

模块一 函数、不等式与导数

微专题 1 函数的图象与性质 …… 012

高分提能一 几类常考函数的综合问题 …… 015

类型一 分段函数　　类型二 新定义函数

类型三 抽象函数

微专题 2 导数的基本应用 …… 018

微专题 3 导数与零点 …… 021

高分提能二 隐零点问题 …… 024

微专题 4 导数中的恒成立、存在性问题 …… 026

高考进阶 1 **必要性探路与充分性证明解决求参问题** …… 029

微专题 5 构造函数证明不等式 …… 030

模块二　三角函数、平面向量与解三角形

微专题 6　三角函数的图象与性质、三角恒等变换 …… 034

微专题 7　解三角形 …… 036

高分提能三　解多三角形问题 …… 039

类型一　中线　　类型二　角平分线

类型三　四边形

微专题 8　平面向量 …… 043

模块三　数列

微专题 9　等差数列、等比数列 …… 045

微专题 10　数列综合问题 …… 048

微专题 11　数列创新问题 …… 050

模块四　立体几何

微专题 12　空间几何体 …… 055

高考进阶 2　立体几何中的综合问题 …… 057

类型一　翻折问题　　类型二　动态问题

微专题 13　立体几何综合 …… 059

模块五　解析几何

微专题 14　直线与圆 …… 064

高考进阶 3　隐圆问题 …… 066

微专题 15　圆锥曲线的标准方程与几何性质 …… 067

高考进阶 4　坐标系内的曲线的图形与性质的研究 …… 070

微专题 16　圆锥曲线的热点问题(一)　斜率、长度、面积问题 …… 071

微专题 17　圆锥曲线的热点问题(二)　最值范围、共点、共线问题 …… 075

微专题 18　圆锥曲线的热点问题(三)　定点、定值问题 …… 078

模块六　统计与概率

微专题 19　计数原理 …… 081

微专题 20　随机变量及其分布 …… 082

高分提能四　统计概率推断、预测问题 …… 087

作业手册（另附分册） / 091

参考答案（另附分册） / 146

02 考前知识清单（另附分册）

● 教材再现　● 易错提醒

03 特色专项（另附分册）

● 贴近真题特点　● 分类强化训练　● 考查内容全面

The part one
第一部分　小题快练
精选模拟题练习，提升高考体验

The part two
第二部分　大题冲关
加强答题规范性，有效快捷提分

思想篇 数学思想方法的应用

思想一 函数与方程思想

函数思想就是用运动和变化的观点，分析和研究数学中的数量关系，是对函数概念本质的认识，建立函数关系或构造函数，运用函数的图象和性质去分析问题、转化问题，从而使问题获得解决. 如求数列中的项或最值、求解三角形最值范围问题、求不等式中的参数、求解析几何中距离或面积的最值等相关的非函数问题，往往都可利用函数思想转化为函数问题.

方程思想就是分析数学问题中变量间的等量关系，建立方程或方程组，或者构造方程，通过解方程或方程组，或者运用方程的性质去分析问题、转化和解决问题. 如变量的取值范围、直线与圆锥曲线的位置关系、数列中的基本量、二项式系数等问题.

典例精析

1. [2026·石景山二模] 在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是棱 C_1D_1 的中点，S 是正方形 $ABCD$ 及其内部的点构成的集合，设集合 $T=\{P\in S\mid PA_1=\sqrt{2}PE\}$，则 T 表示的轨迹是 (　　)

A. 线段　　B. 圆的一部分

C. 椭圆的一部分　　D. 抛物线的一部分

[解法关键]

建立空间直角坐标系，求出点 P 的轨迹方程，则可以判断其为圆的一部分.

2. [2026·北京一零一中测试] 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(x,1)$，$\boldsymbol{b}=(x-1,2x)$，若 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，则 $|\boldsymbol{a}|=$_____.

[解法关键]

根据向量坐标运算得 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(1,1-2x)$，再利用向量垂直的坐标表示得到方程，解出即可.

3. [2024·北京卷] 汉代刘歆设计的“铜嘉量”是斛、合、升、斗、斛五量合一的标准量器，其中升量器、斗量器、斛量器的形状均可视为圆柱. 若升、斗、斛量器的容积成公比为 10 的等比数列，底面直径依次为 65 mm，325 mm，325 mm，且斛量器的高为 230 mm，则斗量器的高为_____mm，升量器的高为_____mm.

[解法关键]

根据容积成公比为 10 的等比数列可得关于高度的方程，求出其解后可得两个量器的高度.

自测题

1. [2025·西城二模] 设圆 $x^2+y^2+4x-6y+5=0$ 的圆心为 M，直线 $y=-x+t$ 与该圆相交于 A，B 两点. 若 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=-4$，则实数 $t=$ (　　)

A. 1　　B. 3 或 1

C. 3　　D. 3 或 −1

2. [2026·北京首师大附中测试] 已知 $a=\ln 2$，$b=\sin\frac{1}{3}$，$c=\frac{1}{3}$，则 a，b，c 的大小关系为 (　　)

A. $b<a<c$　　B. $a<c<b$

C. $b<c<a$　　D. $a<b<c$

3. [2026·北京四中测试] 已知非零不共线向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则向量 $\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 (　　)

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{2\pi}{3}$

4. “$k=\frac{1}{2}$”是“直线 $y=kx+2$ 与抛物线 $y^2=4x$ 只有一个公共点”的 (　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

思想二　数形结合思想

数形结合是根据数量与图形之间的对应关系，通过数与形的相互转化来解决数学问题的一种重要思想方法.数形结合思想体现了数与形之间的转化，它包含“以形助数”和“以数解形”两个方面.数形结合的实质是把抽象的数学语言与直观的图形语言结合起来，即将代数问题几何化、几何问题代数化.

数形结合思想常用来解决函数零点、方程根与不等式问题，参数范围问题，以立体几何为模型的代数问题，解析几何中的斜率、截距、距离等问题.

典例精析

1. 当 $x\in[0,2\pi]$ 时，曲线 $y=\sin x$ 与 $y=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的交点个数为　　(　　)

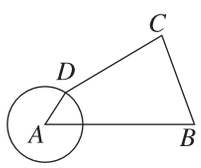
A. 3　　B. 4

C. 6　　D. 8

[解法关键]

分别画出函数 $y=\sin x$ 和函数 $y=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$ 在 $[0,2\pi]$ 上的图象，由图象可直接看出两曲线的交点个数.

2. [2026·北京卷] 曲柄摇杆机构可以实现旋转运动与摆动运动的相互转化，被广泛应用于多个领域.已知从某曲柄摇杆机构中可抽象出如图所示的平面图形 $ABCD$，其中 A，B 为定点，C，D 是动点，$AD=1$，$CD=3$，$BC=\frac{5}{2}$，$AB=4$，则 $\cos\angle ABC$ 的取值范围是　　(　　)



A. $\left[\frac{5}{16},\frac{73}{80}\right]$　　B. $\left[-\frac{5}{16},\frac{73}{80}\right]$

C. $\left[\frac{5}{16},1\right]$　　D. $\left[\frac{5}{16},\frac{73}{80}\right)$

[解法关键]

连接 AC，由 $AD=1$，$CD=3$，可得 AC 的取值范围，在 $\triangle ABC$ 中，借助余弦定理用 AC 表示 $\cos\angle ABC$，则可由 AC 的取值范围求得 $\cos\angle ABC$ 的取值范围.

3. [2024·北京卷] 已知 $M=\{(x,y)\mid y=x+t(x^2-x),1\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant t\leqslant 1\}$ 是平面直角坐标系中的点集.设 d 是 M 中两点间的距离的最大值，S 是 M 表示的图形的面积，则　　(　　)

A. $d=3$，$S<1$　　B. $d=3$，$S>1$

C. $d=\sqrt{10}$，$S<1$　　D. $d=\sqrt{10}$，$S>1$

[解法关键]

先以 t 为变量，分析可知集合 M 表示的图形即为不等式组 $\begin{cases}y\leqslant x^2,\\ y\geqslant x,\\ 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$ 表示的平面区域，然后画出该平面区域，最后结合图形分析求解即可.

自测题

1. [2026·北京清华附中测试] 已知 $0<c<1$，且 $3^a=b^3=c$，则　　(　　)

A. $b<a<c$　　B. $a<c<b$

C. $b<c<a$　　D. $a<b<c$

2. 已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，若在该正方体的棱上有点 M，满足 $MB+MC_1=\sqrt{3}$，则点 M 的个数为　　(　　)

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

3. [2026·海淀一模] 已知平行四边形的两个顶点为 $M(-1,1)$，$P(t,-t)$，另两个顶点在圆 O：$x^2+y^2=8$ 上.对于给定的 t，若这样的平行四边形有且只有一个，则 t 的取值范围是　　(　　)

A. $[-3,-1)$　　B. $[1,3]$

C. $[2,4]$　　D. $[3,5)$

思想三　分类讨论思想

分类讨论思想就是将一个复杂的数学问题分解成若干个简单的基础问题，通过对基础问题的解答解决原问题的思维策略，实质上就是“化整为零，各个击破，再积零为整”的策略. 其研究的基本方向是“分”，但分类解决问题之后，还必须把它们整合在一起. 使用分类讨论思想应明白这样几点：一是引起分类讨论的原因；二是分类讨论的原则，不重不漏，分类标准统一；三是明确分类讨论的步骤.

常见的分类讨论问题有以下几种：1. 由概念引起的分类讨论；2. 由性质、定理、公式的限制条件引起的分类讨论；3. 由数学运算引起的分类讨论；4. 由图形的不确定性引起的分类讨论；5. 由参数的变化引起的分类讨论.

典例精析

1. 已知 $a\in(0,+\infty)$，函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-3,x<2,\\ a\sin x,x\geqslant 2,\end{cases}$ 则下列结论中不可能成立的是（　　）

A. $f(x)$既有最大值，又有最小值

B. $f(x)$有最大值，且无最小值

C. $f(x)$有最小值，且无最大值

D. $f(x)$既无最大值，也无最小值

[解法关键]

分别讨论 $a\geqslant 3$，$1\leqslant a<3$，$0<a<1$ 时函数 $f(x)$的最值情况，判断各选项的结论是否可能成立.

2. 有 6 个相同的球，分别标有数字 1，2，3，4，5，6，从中无放回地随机取 3 次，每次取 1 个球. 设 m 为前两次取出的球上数字的平均值，n 为取出的三个球上数字的平均值，则 m 与 n 之差的绝对值不大于$\frac{1}{2}$的概率为_____.

[解法关键]

根据排列可求样本点的总数，设取出的前两个球的号码依次为 a，b，第三个球的号码为 c，则需满足 $a+b-3\leqslant 2c\leqslant a+b+3$，就 c 的不同取值分类讨论后可求随机事件的概率.

3. [2022·北京卷] 设函数 $f(x)=\begin{cases}-ax+1,x<a,\\ (x-2)^2,x\geqslant a.\end{cases}$ 若 $f(x)$存在最小值，则 a 的一个取值为_____；a 的最大值为_____.

[解法关键]

对分段函数 $f(x)$的分界点进行分类讨论，分类情况有 $a<0$，$a=0$，$0<a\leqslant 2$，$a>2$.

自测题

1. [2026·北京人大附中测试] 已知函数 $f(x)=a\cos x-x^2$，则 $f(x)$ 的极值点的个数情况可能为（　　）

A. 没有极值点

B. 有无穷多个极值点

C. 恰有 2025 个极值点

D. 恰有 2026 个极值点

2. 已知$\{a_n\}$是无穷等比数列，其前 n 项和为 S_n，$a_1=3$，$S_2=\frac{3}{2}$. 若对任意正整数 n，都有 $S_n-(-1)^n\cdot A>0$，则 A 的取值范围是（　　）

A. $(-3,1)$　　B. $[-2,1]$

C. $\left(-3,\frac{3}{2}\right)$　　D. $\left[-2,\frac{3}{2}\right)$

3. [2025·西城二模] 设正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，P 为正方体表面上一点，且点 P 到直线 AA_1 的距离与它到平面 $ABCD$ 的距离相等，记动点 P 的轨迹为曲线 W，则曲线 W 的周长为（　　）

A. $3\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{2}+\pi$

C. $6\sqrt{2}$　　D. $4\sqrt{2}+\pi$

4. [2026·海淀一模] 已知函数 $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx,x<0,\\ bx^2-ax,x\geqslant 0,\end{cases}$ 则“$ab<0$”是“$f(x)$在 **R** 上为单调函数”的（　　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

思想四　转化与化归思想

转化与化归思想是指在研究解决数学问题时，采用某种方法将问题转化，使问题得以解决的一种思维策略，其核心是把复杂的问题化归为容易求解的问题，将较难的问题化归为较简单的问题，将未能解决的问题化归为已经解决的问题，简单说就是化“生”为“熟”.

常见的转化与化归思想的应用具体表现在：将抽象函数问题转化为具体函数问题，立体几何和解析几何中一般性点或图形问题转化为特殊点或特殊图形问题，“至少”或“是否存在”等正向思维受阻问题转化为逆向思维，空间与平面的转化，相等问题与不等问题的转化等.

典例精析

1. [2023·北京卷] 在$\triangle ABC$中，$(a+c)(\sin A-\sin C)=b(\sin A-\sin B)$，则$\angle C=$（　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

[解法关键]

先利用正弦定理将条件中的边角关系式转化为边的关系式，再利用余弦定理求角.

2. [2026·西城二模] 设函数$f(x)=(x-a)\ln(x+b)$，若不等式$f(x)<0$的解集为$\varnothing$，则（　）

A. $a+b>1$　　B. $a+b<0$

C. $a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}$　　D. $a^2+b^2\leqslant\frac{1}{4}$

[解法关键]

先将不等式$f(x)<0$的解集为$\varnothing$转化为$f(x)\geqslant0$在定义域内恒成立，进而得到a,b之间的关系，再利用它们之间的关系求出结果.

3. [2024·北京卷] 若直线$y=k(x-3)$与双曲线$\frac{x^2}{4}-y^2=1$只有一个公共点，则k的一个取值为_____.

[解法关键]

联立直线与双曲线的方程，化简整理得关于x的方程，则原问题等价于关于x的方程只有一个解，即可求得k的取值.

自测题

1. 已知函数$f(x)=4\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，且函数$g(x)=f(x)-a$在$[0,n\pi](n\in\mathbf{N}^*)$内恰有2025个零点，则满足条件的有序数对$(a,n)$（　）

A. 有且仅有1对　　B. 有且仅有2对

C. 有且仅有3对　　D. 有无数对

2. [2025·东城一模] 已知集合$A=\{(x,y)\mid y=\sqrt{x^2-1}\}$，$B=\{(x,y)\mid y=a|x+a|\}$，若$A\cap B$有且只有两个元素，则实数$a$的取值范围为（　）

A. $(-\infty,1)$　　B. $(1,+\infty)$

C. $[0,1]$　　D. $[0,1)\cup(1,+\infty)$

3. [2026·丰台二模] 已知函数$f(x)=a\sin x+\cos 2x(a>0)$，$x\in[0,2\pi]$，若$f(x)$的最大值为$\frac{3}{2}$，则（　）

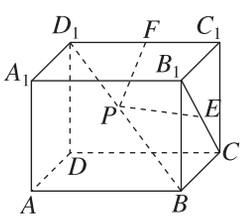
A. $a=\frac{1}{2}$，$f(x)$有2个零点

B. $a=\frac{1}{2}$，$f(x)$有3个零点

C. $a=2$，$f(x)$有2个零点

D. $a=2$，$f(x)$有3个零点

4. [2026·北京理工附中测试] 如图，在长方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，$AB=\sqrt{2}$，$BC=BB_1=1$，E为线段B_1C的中点，F是棱C_1D_1上的动点，若点P为线段BD_1上的动点，则$PE+PF$的最小值为（　）



A. $\sqrt{2}$　　B. $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　D. $\frac{5\sqrt{2}}{6}$

方法篇 选填题的特殊解法

方法一 特殊法

在解决选择题和填空题时，可以取一个(或一些)特殊数值(或特殊位置、特殊函数、特殊点、特殊方程、特殊数列、特殊图形等)来确定其结果，这种方法称为特值法.特值法只需对特殊数值、特殊情形进行检验，省去了推理论证、烦琐演算的过程，提高了解题的速度.特例法是考试中解答选择题和填空题时经常用到的一种方法，应用得当可以起到“四两拨千斤”的功效.

1. 使用前提：满足当一般性结论成立时，对符合条件的特殊化情况也一定成立.

2. 使用技巧：找到满足条件的合适的特殊化例子，或举反例排除，有时甚至需要两次或两次以上特殊化例子才可以确定结论.

3. 常见问题：求范围、比较大小、含字母求值、恒成立问题、任意性问题等.

典例精析

1. [2026·北京第二十中学测试] 已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_9=1$，则$a_3+a_7=$ (　　)

A. -2　　B. $\frac{7}{3}$

C. 1　　D. $\frac{2}{9}$

[解法关键]

本题除了利用等差数列的基本量方法，利用等差数列的性质求解外，采用特例法求解非常快捷.不妨取等差数列$\{a_n\}$的公差$d=0$，则$S_9=1=9a_1$，可得$a_1=\frac{1}{9}$，则$a_3+a_7=2a_1=\frac{2}{9}$.

2. 已知曲线$C:x^2+y^2=16(y>0)$，从C上任意一点P向x轴作垂线PP'，P'为垂足，则线段PP'的中点M的轨迹方程为 (　　)

A. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1(y>0)$

B. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1(y>0)$

C. $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{4}=1(y>0)$

D. $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{8}=1(y>0)$

[解法关键]

在曲线C上取一点$(0,4)$，向x轴作垂线段，中点坐标为$(0,2)$，代入各选项中，只有A符合.

3. [2024·北京卷] 已知(x_1,y_1)，(x_2,y_2)是函数$y=2^x$的图象上两个不同的点，则 (　　)

A. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}<\frac{x_1+x_2}{2}$

B. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}>\frac{x_1+x_2}{2}$

C. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}<x_1+x_2$

D. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}>x_1+x_2$

[解法关键]

根据指数函数和对数函数的单调性结合基本不等式分析判断A，B；举例判断C，D，对于选项C，可取$x_1=-2$，$x_2=-1$，则$y_1=\frac{1}{4}$，$y_2=\frac{1}{2}$；对于选项D，可取$x_1=0$，$x_2=1$，则$y_1=1$，$y_2=2$.

自测题

1. [2026·北京牛栏山一中测试] 已知$x^3-y^3<2^{-x}-2^{-y}$，则下列结论中正确的是 (　　)

A. $\ln\left|\frac{y}{x}\right|>0$　　B. $\ln(y-x+1)>0$

C. $\ln|y+x|>0$　　D. $\ln|y-x|>0$

2. [2026·东城二模] 已知a,b,c,d均为正实数，则“$a+b>c+d$”是“$a^2+b^2>c^2+d^2$”的 (　　)

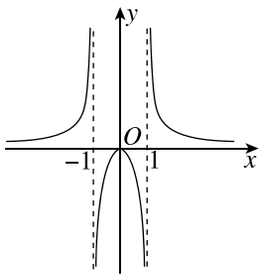
A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

3. 已知函数 $y=f(x)$ 的图象如图，则 $f(x)$ 的解析式可能为 （　）



A. $f(x)=\dfrac{x}{1-|x|}$

B. $f(x)=\dfrac{x}{|x|-1}$

C. $f(x)=\dfrac{|x|}{1-x^2}$

D. $f(x)=\dfrac{|x|}{x^2-1}$

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，对于任意正整数 m，n，都满足 $a_{m+n}=a_m+a_n+mn$，则 $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_{2027}}=$_____.

方法二　验证法

验证法是将选项或特殊值代入题干逐一去验证是否满足题目条件，然后选择符合题目条件的选项的一种方法. 在运用验证法解题时，若能根据题意确定代入顺序，则能提高解题速度.

1. 使用前提：各选项可分别作为条件.

2. 使用技巧：可以结合特值法、排除法等先否定一些明显错误的选项，再选择直觉认为最有可能的选项进行验证，这样可以快速获得答案.

3. 常见问题：题干信息不全、选项是数值或范围、正面求解或计算烦琐的问题等.

典例精析

1. [2026·北京北师大附中测试] 下列函数中，在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是 （　）

A. $f(x)=-\ln x$

B. $f(x)=\dfrac{1}{2^x}$

C. $f(x)=-\dfrac{1}{x}$

D. $f(x)=3^{|x-1|}$

[解法关键]

利用基本初等函数的单调性，结合复合函数的单调性对各选项逐一验证.

2. 若双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 2，且过点 $(\sqrt{2},\sqrt{3})$，则双曲线的方程为 （　）

A. $2x^2-y^2=1$　　B. $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$

C. $5x^2-3y^2=1$　　D. $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{6}=1$

[解法关键]

利用双曲线的离心率是否为 2，发现 A，C 错误，利用双曲线经过点 $(\sqrt{2},\sqrt{3})$ 验证 D 错误.

3. 已知函数 $f(x)=ae^x-\ln x$ 在区间 $(1,2)$ 上单调递增，则 a 的最小值为 （　）

A. e^2　　B. e　　C. e^{-1}　　D. e^{-2}

[解法关键]

$f'(x)=ae^x-\dfrac{1}{x}$，当 a 的值取选项 A，B，C 中的值时，$f'(x)\geqslant 0$ 在 $(1,2)$ 上恒成立，当 $a=e^{-2}$ 时，$f'(x)\geqslant 0$ 在 $(1,2)$ 上不恒成立，故 a 的最小值为选项 C 中的值.

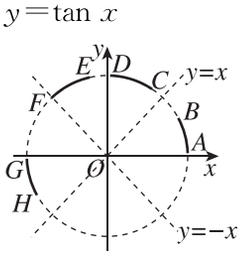
自测题

1. [2025·门头沟一模] 下列函数中，既是奇函数又在 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是 （　）

A. $y=x-\dfrac{1}{x}$　　B. $y=x^3-x$

C. $y=x^{\frac{1}{2}}$　　D. $y=\tan x$

2. [2025·海淀模拟] 在平面直角坐标系中，$\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{CD}$，$\overset{\frown}{EF}$，$\overset{\frown}{GH}$ 是圆 $x^2+y^2=1$ 上的四段弧（如图），点 P 在其中一段上，角 α 以 O 为顶点，Ox 为始边，OP 为终边. 若 $\tan\alpha<\cos\alpha<\sin\alpha$，则 P 所在的圆弧是 （　）



A. $\overset{\frown}{AB}$　　B. $\overset{\frown}{CD}$　　C. $\overset{\frown}{EF}$　　D. $\overset{\frown}{GH}$

基础教育行业专研品牌 全品 30年 行业

3. [2026·北京中学测试] 设函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x, x\geqslant 2,\\ 2-x, x<2,\end{cases}$ 则满足 $f(x)\leqslant 2$ 的 x 的取值范围是 (　　)

A. $[0,4]$　　B. $(0,4]$

C. $[-2,4]$　　D. $[-2,0]$

4. [2026·北京人大附中测试] 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$ 且 $a_{n+1}=S_n^2+1(n\in\mathbf{N}^*)$，给出下列四个结论：①长度分别为 1，$a_{n+1}$，$S_n$ 的三条线段可以构成一个直角三角形；②$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$S_n\geqslant 2^{n-1}$；③$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_n+a_{n+2}<2a_{n+1}$；④$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_{n+1}=2a_n\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

其中所有正确结论的序号是_____.

方法三　构造法

构造法是一种创造性的解题方法，它很好地体现了数学中的发散、类比、转化思想，是指根据题设条件和结论的特征、性质，运用已知数学关系式和理论，构造出满足条件或结论的数学对象，从而使原问题中隐含的关系和性质在新构造的数学对象中清晰地展现出来，并借助该数学对象方便快捷地解决数学问题的方法. 构造法应用的技巧是“定目标构造”，需从已知条件入手，紧扣要解决的问题，把陌生的问题转化为熟悉的问题，解题时常构造函数、方程、几何图形等.

1. 使用前提：所构造的函数、方程、几何图形等要合理，不能超出原题的限制条件.

2. 使用技巧：对于不等式、方程、函数问题常采用构造新函数，对于不规则的几何体常构造成规则几何体处理.

3. 常见问题：比较大小、函数导数问题、不规则的几何体问题等.

典例精析

1. 设 $a=0.1e^{0.1}$，$b=\frac{1}{9}$，$c=-\ln 0.9$，则 (　　)

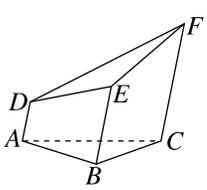
A. $a<b<c$　　B. $c<b<a$

C. $c<a<b$　　D. $a<c<b$

[解法关键]

构造函数 $f(x)=(1-x)e^x(0<x<1)$ 和 $g(x)=xe^x+\ln(1-x)(0<x\leqslant 0.1)$，利用导数性质求出 $a<b$ 和 $a>c$，由此能求出结果.

2. 一个五面体 $ABC\text{-}DEF$ 如图所示，已知 $AD\parallel BE\parallel CF$，且两两之间的距离为 1，并已知 $AD=1$，$BE=2$，$CF=3$，则该五面体的体积为 (　　)



A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$　　B. $\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}$

[解法关键]

采用补形法将五面体 $ABC\text{-}DEF$ 补成一个三棱柱，再利用体积公式即可.

3. [2026·北京一零一中测试] 曲线 $y=x^3-3x$ 与 $y=-(x-1)^2+a$ 在$(0,+\infty)$上有两个不同的交点，则 a 的取值范围为_____.

[解法关键]

将函数转化为方程，令 $x^3-3x=-(x-1)^2+a$，分离参数 a，构造新函数 $g(x)=x^3+x^2-5x+1(x>0)$，结合导数求得 $g(x)$的单调区间，画出 $g(x)$的大致图象，数形结合即可求解.

自测题

1. 设 $a=\sin 0.2$，$b=0.2\cos 0.1$，$c=2\sin 0.1$，则 (　　)

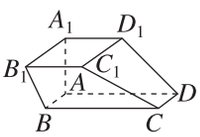
A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$

C. $b<a<c$　　D. $c<b<a$

2. [2024·朝阳二模] 已知 n 个大于 2 的实数 x_1，x_2，…，x_n，对任意 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$，存在 $y_i\geqslant 2$ 满足 $y_i<x_i$ 且 $x_i^{y_i}=y_i^{x_i}$，则使得 $x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}\leqslant 15x_n$ 成立的最大正整数 n 为 (　　)

A. 14　　B. 16　　C. 21　　D. 23

3. [2024·东城二模] 如图，在六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，平面 $ABCD\parallel$平面 $A_1B_1C_1D_1$，四边形 $ABCD$ 与四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是两个全等的矩形. $AB\parallel A_1B_1$，$AD\parallel A_1D_1$，$AA_1\perp$平面 $ABCD$，$AB=B_1C_1=2$，$BC=A_1B_1=4$，$AA_1=2$，则 $BB_1=$_____，该六面体的任意两个顶点间距离的最大值为_____.



自习篇 集合、复数、常用逻辑用语、不等式的性质与基本不等式、统计

自习一 集合

1. [2026·西城一模] 已知集合 $A=\{x|x^2-3x<0\}$,集合 $B=\{x|x-2>0\}$,则集合 $A\cup B=$ (　　)

A. $(0,3)$　　B. $(2,3)$

C. $(0,+\infty)$　　D. $(2,+\infty)$

2. 设集合 $A=\left\{x\in\mathbf{Z}\left|\dfrac{x-3}{x+1}\leqslant 0\right.\right\}$,$B=\{x|\log_2(x+2)\leqslant 2\}$,则 $A\cap B=$ (　　)

A. $[-1,2]$　　B. $(-1,2]$

C. $\{-1,0,1,2\}$　　D. $\{0,1,2\}$

3. [2025·北京卷] 集合 $M=\{x|2x-1>5\}$,$N=\{1,2,3\}$,则 $M\cap N=$ (　　)

A. $\{1,2,3\}$　　B. $\{2,3\}$

C. $\{3\}$　　D. $\varnothing$

4. [2025·海淀一模] 已知集合 $U=\{x||x|>1\}$,$A=\{x|x\geqslant 2\}$,则 $\complement_U A=$ (　　)

A. $(-\infty,2)$　　B. $(-\infty,-1)\cup(1,2]$

C. $(-\infty,2]$　　D. $(-\infty,-1)\cup(1,2)$

【技巧点拨】

解决集合问题时要注意以下几点:1. 集合中元素的互异性;2. 不能忽略空集;3. 要注意端点的取值;4. 对于描述法表示的集合,要注意代表元素的意义.

自习二 复数

1. [2023·北京卷] 在复平面内,复数 z 对应的点的坐标是 $(-1,\sqrt{3})$,则 z 的共轭复数 $\overline{z}=$ (　　)

A. $1+\sqrt{3}\mathrm{i}$　　B. $1-\sqrt{3}\mathrm{i}$

C. $-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$　　D. $-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$

2. [2026·丰台一模] 若 $z(1+\mathrm{i})=2\mathrm{i}$,则 $z=$ (　　)

A. $-1-\mathrm{i}$　　B. $-1+\mathrm{i}$

C. $1-\mathrm{i}$　　D. $1+\mathrm{i}$

3. [2025·北京卷] 已知复数 z 满足 $\mathrm{i}\cdot z+2=2\mathrm{i}$,则 $|z|=$ (　　)

A. $\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{2}$

C. 4　　D. 8

4. [2026·西城一模] 在复平面内,复数 $(2+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})$ 对应的点位于 (　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

5. 若复数 $\dfrac{a+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}(a\in\mathbf{R})$ 是纯虚数,则 $a=$_____.

【技巧点拨】

1. 复数运算的重点是除法运算,其关键是进行分母实数化;2. 利用复数相等 $a+b\mathrm{i}=c+d\mathrm{i}$ 求解时,要注意 a,b,c,d 为实数的前提条件.

自习三　常用逻辑用语

1. [2023·北京卷] 若 $xy\neq0$，则“$x+y=0$”是“$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-2$”的　　(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

2. [2026·房山二模] 在$\triangle ABC$中，“$\sin A>\sin C$”是“$\cos A<\cos C$”的　　(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

3. [2025·北京卷] 已知函数 $f(x)$的定义域为 D，则“函数 $f(x)$的值域为 $\mathbf{R}$”是“对任意 $M\in\mathbf{R}$，存在 $x_0\in D$，使得$|f(x_0)|>M$”的　　(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. [2026·西城一模] 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量，则“对于任意 $\lambda\in\mathbf{R}$，都有 $\boldsymbol{b}\neq\lambda\boldsymbol{a}$”是“$|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$”的　　(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

5. [2026·北京四中测试] 能够说明“设 a,b,c 均为正实数，若 $a+b>c$，则 $a^2+b^2>c^2$”是假命题的一组正实数 a,b,c 的值依次为_____.

【技巧点拨】

若 $p\Rightarrow q$，则 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件，要注意推理的方向，难点还是在于与之相关知识的考查. 另外要注意“A 是 B 的充分条件”与“B 是 A 的充分条件”是不同的概念.

自习四　不等式的性质与基本不等式

1. [2026·石景山二模] 已知实数 a,b,c,d 满足 $a>b>c>d$，则下列不等式恒成立的是　　(　　)

A. $a+c>b+d$　　B. $a-c<b-d$

C. $ab>cd$　　D. $ac>bd$

2. [2025·海淀二模] 设 $a,b,c\in\mathbf{R}$，$abc\neq0$，且 $a>b>c$，则　　(　　)

A. $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}>2$　　B. $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}<2$

C. $2a>b+c$　　D. $a+b>c$

3. [2025·北京卷] 已知 $a>0,b>0$，则　　(　　)

A. $a^2+b^2>2ab$　　B. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{1}{ab}$

C. $a+b>\sqrt{ab}$　　D. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leqslant\frac{2}{\sqrt{ab}}$

4. [2026·北京北师大附中测试] 已知非零实数 a,b 满足 $a+b>1$,则 (　　)

A. $a^{-1}+b^{-1}>1$　　B. $a^2+b^2>1$

C. $3a^2+2b^2>1$　　D. $a^3+b^3>1$

5. [2026·北京十一学校测试] 已知 $a>b>0$ 且 $ab=10$,则下列结论中不正确的是 (　　)

A. $\lg a+\lg b>0$　　B. $\lg a-\lg b>0$

C. $\lg a\cdot\lg b<\frac{1}{4}$　　D. $\frac{\lg a}{\lg b}>1$

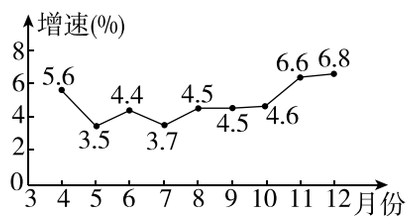
【技巧点拨】

1. 要准确使用不等式的有关性质;2. 合理举出一些反例进行排除论证;3. 不要忽略使用基本不等式时的条件;4. 当多次使用基本不等式时,要注意等号是否同时成立.

自习五　统计

1. 近年来,我国国民经济运行总体稳定,延续回升向好态势. 如图是我国某年规模以上工业增加值同比增长速度(以下简称增速)统计图.

注:规模以上工业指年主营业务收入 2000 万元及以上的工业企业.



下列说法正确的是 (　　)

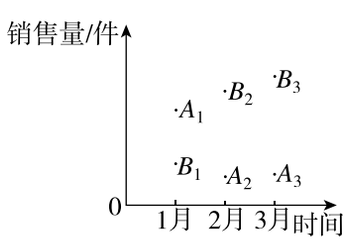
A. 4 月、5 月、6 月这三个月增速的方差比 4 月、5 月、6 月、7 月这四个月增速的方差大

B. 4 月、5 月、6 月这三个月增速的平均数比 4 月、5 月、6 月、7 月这四个月增速的平均数小

C. 连续三个月增速的方差最大的是 9 月、10 月、11 月这三个月

D. 连续三个月增速的平均数最大的是 9 月、10 月、11 月这三个月

2. 如图为某商铺 A,B 两种商品在 2025 年前 3 个月的销售情况统计图,已知 A 商品卖出一件盈利 20 元,B 商品卖出一件盈利 10 元. 图中点 A_1,A_2,A_3 的纵坐标分别表示 A 商品 2025 年前 3 个月的销售量,点 B_1,B_2,B_3 的纵坐标分别表示 B 商品 2025 年前 3 个月的销售量. 根据图中信息,下列四个结论中正确的是 (　　)



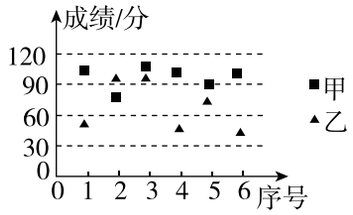
①2 月 A,B 两种商品的总销售量最多;②3 月 A,B 两种商品的总销售量最多;

③1 月 A,B 两种商品的总盈利最多;④2 月 A,B 两种商品的总盈利最多.

A. ①③　　B. ①④

C. ②③　　D. ②④

3. 已知甲、乙两名同学 6 次数学测试的成绩(单位:分)统计如图,则下列说法不正确的是 (　　)



A. 甲成绩的极差小于乙成绩的极差

B. 甲成绩的中位数小于乙成绩的第 75 百分位数

C. 甲成绩的平均数大于乙成绩的平均数

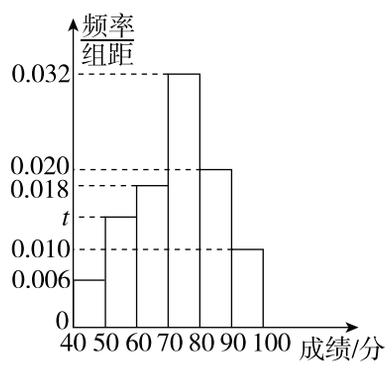
D. 甲成绩的方差小于乙成绩的方差

4. A,B,C 三个班共有 120 名学生,为调查他们的体育锻炼情况,通过比例分配的分层随机抽样获得了部分学生一周的锻炼时间,数据如下表(单位:小时).

A 班	6	6.5	7	7.5	8	8	
B 班	6	7	8	9	10	11	12
C 班	4	6.5	8	8.5	10	12.5	13.5

估计 A 班的学生人数为_____;设 B 班体育锻炼时间的方差为 s_1^2,C 班体育锻炼时间的方差为 s_2^2,则 s_1^2_____s_2^2(填$>$,$<$或$=$).

5. 某学校从全校学生中随机抽取了 50 名学生作为样本进行数学知识测试,记录他们的成绩,测试卷满分 100 分,将所得数据分成 6 组:$[40,50)$,$[50,60)$,$[60,70)$,$[70,80)$,$[80,90)$,$[90,100]$,并整理得到如图所示的频率分布直方图.图中 t 的值为_____;若全校学生参加同样的测试,估计全校学生的平均成绩为_____分.



【技巧点拨】

1. 抽样问题的重点是比例分配的分层随机抽样及其相关计算;2. 统计图表问题,一是要从中得出有关数字特征,如中位数、平均数、百分位数、方差等计算,二是要从图表中发现其反馈出来的信息,如优劣比较、变化趋势等.

模块一　函数、不等式与导数

微专题 1　函数的图象与性质

考点要求	考题统计	考情分析
函数的图象与性质	2026 年北京卷第 5,13,15 题 2025 年北京卷第 4,7 题 2024 年北京卷第 7,9 题 2023 年北京卷第 4,11,15 题 2022 年北京卷第 7,11,14 题	函数的图象与性质 1. 对函数的性质(如单调性、奇偶性、周期性)的考查,其主要载体是指数函数、对数函数和分段函数,多为选填题中的中档题; 2. 考查指对运算与指对函数模型,多以中档题出现; 3. 考查函数性质的综合运用,此类问题对恒等变形、等价转化的能力要求较高,多为选填题中的压轴题

考法探析·明规律

微点 1　函数的概念与表示

自测题

1. [2025·朝阳一模] 已知函数 $f(x)=|x|-|x-2|+1$,则对任意实数 x,有 (　　)

A. $f(1-x)=2-f(1+x)$　　B. $f(-x)=-f(x)-2$

C. $f(2-x)=2+f(x)$　　D. $f(2+x)=f(2-x)$

2. [2023·北京卷] 已知函数 $f(x)=4^x+\log_2 x$,则 $f\left(\frac{1}{2}\right)=$_____.

3. [2026·丰台一模] 函数 $f(x)=\sqrt{\log_2 x-1}$ 的定义域为_____.

微点 2　函数的单调性与奇偶性

例 1 [2026·北京卷] 下列函数 $f(x)$ 是奇函数且在定义域上单调递增的是 (　　)

A. $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$　　B. $f(x)=\sin x$

C. $f(x)=2^{-x}-2^x$　　D. $f(x)=\ln\frac{5+x}{5-x}$

例 2　已知函数 $f(x)=\begin{cases}(x-a)^2, x\leqslant 0,\\ x+\frac{1}{x}+a, x>0.\end{cases}$ 若 $a=0$,则函数 $f(x)$ 的单调递增区间为_____;若 $f(0)$ 是函数 $f(x)$ 的最小值,则实数 a 的取值范围为_____.

[听课笔记]

【规律提炼】

判断函数奇偶性、单调性的关键：

1. 函数奇偶性、单调性的定义及相关结论(如奇函数×偶函数＝奇函数)；

2. 借助函数的图象，可以通过图象的平移、伸缩、对称这些变换得到目标函数的图象，注意特殊点的关键作用.

自测题

1. [2026·房山二模] 下列函数中，既是奇函数又在定义域上单调递增的是 (　　)

A. $f(x)=\tan x$　　B. $f(x)=x^3+1$

C. $f(x)=e^x-\frac{1}{e^x}$　　D. $f(x)=x+\frac{1}{x}$

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}a^x-1,x\leqslant 1,\\ x^2-ax+4a-5,x>1\end{cases}$ 在 **R** 上单调递增，则 a 的取值范围为 (　　)

A. $(1,2]$　　B. $[1,2]$

C. $\left(\frac{3}{2},2\right]$　　D. $\left[\frac{3}{2},2\right]$

3. [2025·朝阳二模] 已知函数 $f(x)$ 是 **R** 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=x+e^{2-x}$，则 $f(-2)=$_____；若存在 $a,b,c\in\mathbf{R}(a\neq b)$，使得 $f(a)=f(b)=c$，则 c 的一个取值为_____.

微点3　基本初等函数图象与性质

例3 [2025·朝阳一模] 已知 $a=\log_{0.5}0.2,b=0.5^{0.5},c=2^{0.5}$，则 (　　)

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$

C. $b<a<c$　　D. $b<c<a$

例4 [2026·北京第一七一中学测试] 已知 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ 是函数 $y=\log_2 x$ 的图象上两个不同的点，则下列结论正确的是 (　　)

A. $\frac{y_1-y_2}{2}<x_1-x_2$　　B. $\frac{y_1-y_2}{2}>x_1-x_2$

C. $y_1+y_2<x_1+x_2$　　D. $y_1+y_2>x_1+x_2$

[听课笔记]

【规律提炼】

研究基本初等函数的图象与性质要特别注意：

1. 指、对函数的底数对函数性质的影响；

2. 一些特殊点和特殊线，如指、对函数的图象恒过的点，渐近线，同底指、对函数图象的对称轴.

自测题

1. [2025·东城一模] 已知 $x>1,y>1$，则“$4^x>2^y$”是“$\log_2 x>\log_4(y-1)$”的 (　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

2. [2025·北京卷] 为得到函数 $y=9^x$ 的图象，只需把函数 $y=3^x$ 的图象上的所有点 （　）

A. 横坐标变成原来的$\frac{1}{2}$，纵坐标不变

B. 横坐标变成原来的 2 倍，纵坐标不变

C. 纵坐标变成原来的$\frac{1}{3}$，横坐标不变

D. 纵坐标变成原来的 3 倍，横坐标不变

3. [2025·海淀二模] 已知函数 $f(x)=\frac{2^x}{2^x+4}$，则 $f(x)$ 的值域为_____，曲线 $y=f(x)$ 的对称中心为_____.

微点 4　函数模型与应用

例 5 [2026·北京卷] 音高 y（单位：mel）与频率 f（单位：Hz）满足 $y=\lg\left(1+\frac{f}{700}\right)$，若 $\lg 2\leqslant y\leqslant 3\lg 2$，则 f 的取值范围为_____.

例 6 [2026·丰台一模] 某聚乙烯材料的抗拉强度 P（单位：MPa）与时间 t（单位：年）的关系为 $P(t)=P_0e^{-kt}$，其中 P_0 和 k 是正的常数. 已知经过 5 年，该材料的抗拉强度衰减为原来的一半，则其抗拉强度衰减为原来的$\frac{1}{5}$大约需要经过（参考数据：$\ln 2\approx 0.693$，$\ln 5\approx 1.609$） （　）

A. 7.3 年　　B. 11.6 年

C. 12.5 年　　D. 23.2 年

[听课笔记]

【规律提炼】

常见函数应用的基本模型是一次、二次、指数、对数、幂函数等模型，注意指数对数的互换以及指数对数的基本运算法则.

自测题

1. [2026·朝阳二模] 某电子产品的电池健康度 E 随循环次数 n 衰减的函数模型为 $E(n)=Ae^{-kn}+30$，其中 A，k 为常数，$A>0$，$k>0$，$n\in\mathbf{N}^*$. 已知 $E(0)=100$，$E(100)=80$，则电池健康度从 80 衰减到 60，循环次数大约需要增加（参考数据：$\ln 3\approx 1.10$，$\ln 5\approx 1.61$，$\ln 7\approx 1.95$） （　）

A. 120　　B. 150

C. 170　　D. 180

2. [2025·北京卷] 在一定条件下，某人工智能语言模型训练 N 个单位的数据量所需要时间 $T=k\log_2 N$（单位：小时），其中 k 为常数，在此条件下，已知训练数据量 N 从 10^6 个单位增加到 1.024×10^9 个单位时，训练时间增加 20 小时，则当训练数据量 N 从 1.024×10^9 个单位增加到 4.096×10^9 个单位时，训练时间增加（单位：小时） （　）

A. 2　　B. 4

C. 20　　D. 40